ESTUDO DO CRESCIMENTO POPULACIONAL DE INSETOS ATRAVÉS DO MODELO LOGÍSTICO

Marinéia de L. Haddad[1] Sinval S. Neto[1]

ABSTRACT

Study of insect population growth through the Logistic Model

This paper deals with the determination of the estimative of the parameters α, β and δ of the logistic function, by using formulae of easy application as demonstrated with a population of *Myzus persicae*. (Sulzer, 1776).

RESUMO

Neste trabalho é proposta a determinação das estimativas dos parâmetros α, β e δ da função logística, através de fórmulas de fácil aplicação, demonstrado com uma população de *Myzus persicae* (Sulzer, 1776).

INTRODUÇÃO

Uma população de insetos não cresce indefinidamente, devido a limitações estabelecidas pela disponibilidade de alimento, por falta de espaço, por condições meteorológicas intoleráveis ou por algum mecanismos de controle. (SILVEIRA NETO *et al.* 1976).

Recebido em 03/06/88

[1] ESALQ - Deptº de Entomologia - Cx. Postal 9, 13400 Piracicaba-SP.

Seja $y = y(t)$ o número de indivíduos em uma população no instante t e α o limite superior para y.

Então, $y = y(t)$ pode aproximar-se de α assintoticamente. Isto implica que a taxa de crescimento dy/dt tenda para zero, quando $(\alpha - y)$ se torna cada vez menor. (KREBS, 1972).

Segundo BATSCHELET (1978), num modelo para o estudo descritivo de crescimento, que seja biologicamente mais significativo, deve-se admitir que y é proporcional a y e a $(\alpha - y)$. Esta idéia, leva à seguinte equação diferencial:

(1) $\frac{dy}{dt} = \theta y(\alpha - y)$, onde:

$\theta = \frac{\gamma}{\alpha}$ é uma constante positiva e

$\lim\limits_{t\to\infty} y = \alpha, \qquad \lim\limits_{t\to-\infty} y = 0$

Da integração de (1) resulta a função logística, definida por:

(2) $y = \frac{\alpha}{1 + e^{-(\beta+\gamma t)}}$, onde

α, β e γ são parâmetros, $\alpha > 0$ e $\gamma > 0$ (VERHULST, 1845).

O estudo descritivo dessa função é apresentado através das características da função logística (HOFFMANN & VIEIRA, 1983):

- A função logística é monotonicamente crescente entre duas assíntotas horizontais: o eixo das abcissas e a reta de ordenada igual a α.

- O parâmetro α, que é a distância entre as duas assíntotas, é denominado "nível de saturação".

- O parâmetro γ está relacionado com a taxa de crescimento da função e pode ser determinado em qualquer tempo t.

- β é um parâmetro de posição, ou seja, mudando-se apenas o valor de β, a curva se movimenta horizontalmente.

- A função logística tem ponto de inflexão para a abcissa.

$t = -\frac{\beta}{\gamma}$, quando $y = \frac{\alpha}{2}$.

- A função logística é radialmente simétrica em torno do seu ponto de inflexão.

- O fator γ, cujo valor cresce com t, é denominado "fator de momento".

- A diferença (α - y), cujo valor diminui à medida que t aumenta, é denominada "fator de contenção".

A obtenção de estimativas consistentes e assintoticamente eficientes dos parâmetros α, β e γ (método de NELDER, 1961) requer conhecimentos de estatística e álgebra matricial, o que não raro, é um obstáculo para os biocientistas utilizarem a função logística.

Daí surguiu a idéia deste trabalho, que é encontrar fórmulas prontamente utilizáveis para as estimativas desses parâmetros, pelo método de Nelder.

MATERIAL E MÉTODO

De (1) e considerando um erro multiplicativo, obtém-se o modelo:

$y_i = \alpha\left[1 + \bar{e}^{(\beta+\gamma t_i)}\right]^{-1} e_i$, onde:

$i = 0, 1, 2, \ldots, N$ (número de observações)

y_i = número de insetos/área no tempo t_i

α, β, γ = parâmetros

t_i = tempo

e_i = erro aleatório, $e_i \cap N(0, \sigma^2)$

Aplicando-se logarítmo natural em (3), obtém-se:

(4) $Z_i = g + \ln(1 - w_i) + u_i$, onde:

$Z_i = \ln Y_i$

$g = \ln \alpha$

$w_i = \left[1 + e^{(\beta+ \gamma t_i)}\right]^{-1}$

$1 - w_i = [1 + \bar{e}^{(\beta+\gamma t_i)}]^{-1}$

$u_i = \ln e_i$, $u_i \cap N(0, \sigma^2)$.

Considere-se a, b e c estimativas dos parâmetros α, β e γ.

Assim, o sistema de equações normais fica:

$$(5)\quad \begin{cases} \sum_i (Z_i - \hat{Z}_i) = 0 \\ \sum_i (Z_i - \hat{Z}_i)\hat{w}_i = 0 \\ \sum_i (Z_i - \hat{Z}_i)\hat{w}_i t_i = 0 \end{cases}$$

onde:

$$(6)\quad \hat{Z}_i = \hat{g} + \ln(1 - \hat{w}_i) \text{ e}$$

$$(1 - \hat{w}_i) = \left[1 + e^{-(b+ct_i)}\right]^{-1}$$

$$\hat{g} = \ln a.$$

O sistema (5) é não-linear, e portanto, não possui solução explícita para g, b e c.

Para resolver esse problema será utilizado o método de Newton, considerando-se g_0, b_0 e c_0 como estimativas preliminares de ln α, β e γ, respectivamente, (ATKINSON, 1985).

Assim, o próximo passo será determinar g_0, b_0 e c_0. Existem vários métodos para obtenção dessas estimativas iniciais, porém será mencionado o método que, além da simplicidade, se ajusta bem a dados entomológicos, como será demonstrado através do desenvolvimento de colônias de *Myzus persicae* sobre folhas de couve, na área experimental do Deptº de Entomologia, ESALQ.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Seja:

$$(7)\quad a_0 = y_{(N-1)}$$

Para obtenção de b_0 e c_0 será considerada uma regressão de ln $[y_i/(a_0 - y_i)]$ contra t_i, obtida pelo método dos mínimos quadrados ponderados. Assim:

$$(8)\quad b_0 = \frac{\left(\sum_i t_i^2 v_i^{-1}\right)\left(\sum_i f_i v_i^{-1}\right) - \left(\sum_i t_i v_i^{-1}\right)\left(\sum_i t_i f_i v_i^{-1}\right)}{\left(\sum_i v_i^{-1}\right)\left(\sum_i t_i^2 v_i^{-1}\right) - \left(\sum_i t_i v_i^{-1}\right)^2} \quad \text{e}$$

$$(9)\quad c_0 = \frac{\left(\sum_i v_i^{-1}\right)\left(\sum_i t_i f_i v_i^{-1}\right) - \left(\sum_i t_i v_i^{-1}\right)\left(\sum_i f_i v_i^{-1}\right)}{\left(\sum_i v_i^{-1}\right)\left(\sum_i t_i^2 v_i^{-1}\right) - \left(\sum_i t_i v_i^{-1}\right)^2}$$

onde:

$$v_i^{-1} = \left[(a_0 - y_i)/a_0\right]^2 \quad \text{e}$$

$$f_i = \ln\left[y_i/(a_0 - y_i)\right]$$

Considerando-se as aproximações lineares do ponto de coordenadas g_0, b_0 e c_0, obtêm-se as estimativas da função logística, dadas por:

$$\ln a = \ln \hat{\alpha} = \frac{1}{N}\sum_i z_i + \frac{1}{n}\sum_i \ln\left[1/(1 - w_i^*)\right] = K,$$

onde:

$$z_i = \ln y_i$$

$$w_i^* = \left[1 + e^{(b_0 + c_0 t_i)}\right]^{-1} \quad \text{e}$$

$$(1 - w_i^*) = \left[1 + e^{-(b_0 + c_0 t_i)}\right]^{-1}, \text{ assim,}$$

$$(10)\quad a = \hat{\alpha} = e^K$$

$$(11)\quad b = \hat{\beta} = b_0 + \left[(H_4 \times F_1 + H_5 \times F_2 + H_6 \times F_3)/DT\right] \quad \text{e}$$

$$(12)\quad c = \hat{\gamma} = c_0 + \left[(H_7 \times F_1 + H_8 \times F_2 + H_9 \times F_3)/DT\right]$$

onde:

$$DT = \left[\begin{array}{l} N\left(\sum_i w_i^{*2}\right)\left(\sum_i w_i^{*2} t_i^2\right) + \left(2 \sum_i w_i^*\right)\left(\sum_i w_i^{*2} t_i\right)\left(\sum_i w_i^* t_i\right) \\ -\left(\sum_i w_i^{*2}\right)\left(\sum_i w_i^* t_i\right)^2 - N\left(\sum_i w_i^{*2} t_i\right)^2 - \left(\sum_i w_i^*\right)^2\left(\sum_i w_i^{*2} t_i^2\right) \end{array}\right]$$

$$H_4 = \sum_i w_i^* t_i \sum_i w_i^{*2} t_i - \sum_i w_i^* \sum_i w_i^{*2} t_i^2$$

$$H_5 = N\sum_i w_i^{*2} t_i^2 - \left(\sum_i w_i^* t_i\right)^2$$

$$H_6 = H_8 = \sum_i w_i^* \sum w_i^* t_i - N\sum w_i^{*2} t_i$$

$$H_7 = \sum_i w_i^* \sum_i w_i^{*2} t_i - \sum_i w_i^{*2} \sum_i w_i^* t_i$$

$$H_9 = N\Sigma w_i^{*2} - \left(\Sigma_i w_i^*\right)^2$$

$$F_1 = \Sigma_i (Z_i - \hat{Z}_i^*)$$

$$F_2 = \Sigma_i (Z_i - \hat{Z}_i^*) w_i^*$$

$$F_3 = \Sigma_i (Z_i - \hat{Z}_i) w_i^* t_i, \text{ onde:}$$

$$\hat{Z}_i^* = \ln a_0 + \ln(1 - w_i^*).$$

Essas estimativas só serão consideradas definitivas quando houver convergência (MOSTELLER & TUKEY, 1977) ou seja, quando:

$$\left[\frac{b - b_0}{b_0}\right] \leq 0.005.$$

Caso essa condição não ocorra, o cálculo para as estimativas deve ser refeito, considerando como estimativas iniciais as últimas obtidas, e assim, por diante. Uma medida para a qualidade de ajuste pode ser obtida através da Soma de Quadrados dos Desvios (SQ Desvios), dada por:

$$(13) \quad \text{SQDesvios} = \Sigma_i (Z_i - \hat{Z}_i)^2.$$

O processo de cálculos é trabalhoso, porém com as fórmulas apresentadas é possível o estudo de muitas variáveis biológicas, que se ajustam a uma função logística.

Utilizando-se da informática, o processo apresentado é facilmente resolvido através de um "software", apresentado a seguir, em linguagem basic.

```
1 LPRINT:LPRINT:LPRINTCHR$(27):CHR$(14)
2 LPRINT TAB(6)" FUNCAO LOGISTICA"
3 LPRINTCHR$(27):CHR$(15)
4 LPRINT:LPRINTTAB(20):"DR MARINEIA DE LARA HADDAD-ENTOMOLIA-ESALQ"
5 LPRINT:LPRINT:CLS
6 REM******ESTIMATIVAS INICIAIS DOS PARAMETROS******
7 REM*******METODO DOS MINIMOS QUADRADOS PONDERADOS***
8 DIM X(50).Y(50).YY(50).E(50)
9 LPRINTTAB(6):"MENSAGEM:OS TRES PRIMEIROS DADOS DEVEM SER EQUIDISTANTES"
10 PRINT"ENTRE COM O NUMERO DE DADOS"::INPUT N
12 LPRINT:LPRINT:LPRINT
15 PRINT:PRINT
20 FOR I=1 TO N
30 PRINT "VALOR DE Y("I")="::INPUT Y(I)
33 PRINT "VALOR DE X("I")="::INPUT X(I)
34 PRINT:PRINT:NEXT
35 IF (X(N)-X(N-1))=(X(N-1)-X(N-2)) THEN A0=((2*(1/(Y(N-1))))-(1/(Y(N-2)))-(1/(Y
(N))))/((1/(Y(N-1)[2))-(1/(Y(N-2)))*(1/(Y(N))))):GOTO 38
36 A0=Y(N)-1
38 FOR I=1 TO N
40 Q(I)=A0-Y(I):IF Q(I)<0 THEN Q(I)=-Q(I):GOTO41
41 P(I)=LOG(Y(I)/Q(I))
45 C(I)=((A0-Y(I))/A0)[2
46 T=T+C(I):B=B+C(I)*X(I)*P(I):K=K+C(I)*X(I)
47 W=W+C(I)*P(I):G=G+X(I)[2*C(I)
70 NEXT
71 PRINT:PRINT:CLS
73 A2=(T*B-K*W)/(T*G-K[2)
75 A1=(G*W-K*B)/(T*G-K[2)
95 G0=LOG(A0)
96 D4=0:D5=0:D6=0:D7=0:D8=0:F1=0:F2=0:F3=0:J=0:L=0
97 PRINT:PRINT
100 FOR I=1 TO N
110 D1(I)=LOG(Y(I)):D2(I)=1/(1+EXP(A1+A2*X(I)))
120 D3(I)=G0+LOG(1-D2(I))
130 D4=D4+D2(I):D5=D5+D2(I)*X(I)
140 D6=D6+D2(I)[2*X(I):D7=D7+D2(I)[2*X(I)[2
150 D8=D8+D2(I)[2:D9=D5[2
160 F1=F1+(D1(I)-D3(I)):F2=F2+(D1(I)-D3(I))*D2(I)
170 F3=F3+(D1(I)-D3(I))*D2(I)*X(I)
180 NEXT
190 DT=(N*D8*D7+2*D4*D6*D5-D8*D5[2-N*D6[2-D4[2*D7)
200 H1=D8*D7-D6[2:H2=D5*D6-D4*D7:H3=D4*D6-D5*D8
210 H4=D5*D6-D4*D7:H5=N*D7-D5[2:H6=D4*D5-N*D6
220 H7=D4*D6-D8*D5:H8=D4*D5-N*D6:H9=N*D8-D4[2
230 DG=(H1*F1+H2*F2+H3*F3)/DT
240 DB=(H4*F1+H5*F2+H6*F3)/DT
250 DC=(H7*F1+H8*F2+H9*F3)/DT
```

```
270 FOR I=1 TO N:J=J+D1(I)
280 L=L+LOG(1+EXP(-1*(DB+A1)-((DC+A2)*X(I))))
290 NEXT
300 C=EXP((1/N*J+1/N*L))
320 NC=NC+1
325 REM*****TESTE PARA CONVERGENCIA *********
326 PRINT CHR$(23)
330 PRINT @6*64+20," AGUARDE IMPRESSAO"
335 BW=DB+A1:CW=DC+A2
340 IF ABS((BW-A1)/BW)<=.005 THEN GOTO 397
350 IF NC=10 THEN GOTO 399
360 A1=BW:DO=C:A2=CW
370 GOTO 96
397 BW=-1*BW:CW=-1*CW
400 C1$="***************** RESULTADOS *******************"
410 C2$="*                                                  *"
420 C3$="*             EQUACAO DA FUNCAO LOGISTICA          *"
430 C4$="*  Y=####.####/(1+EXP(###.#### + ###.#### * X))    *"
440 C5$="*          NUMERO DE CICLOS DE CNVERGENCIA=##      *"
445 C7$="*                SQ DESVIOS=####.#####             *"
450 C6$="****************************************************
460 GOSUB 800
700 LPRINTTAB(7) C1$:LPRINTTAB(7)C2$
710 LPRINTTAB(7) C3$:LPRINTTAB(7)C2$
720 LPRINTTAB(7) USING C4$;C;BW;CW:LPRINTTAB(7) C2$
730 LPRINT TAB(7)USINGC5$;NC:LPRINT TAB(7)C2$
731 LPRINT TAB(7)USING C7$;E:LPRINT TAB(7) C2$
732 LPRINT TAB(7) C6$
740 CLS:END
800 FOR I=1 TON
810 YY(I)=LOG(C)-LOG(1+EXP(BW+CW*X(I)))
820 E=E+(LOG(Y(I))-YY(I))[2
821 E(I)=Y(I)-YY(I)
830 NEXT
840 RETURN
```

Para verificar se o crescimento da população de *Myzus persicae* se ajusta a uma função logística, aplicou-se a metodologia apresentada aos dados de contagem de pulgões, acompanhados desde o início da formação da colônia, numa folha de couve de aproximadamente 100 cm^2 de área, apresentado no Quadro 1.

QUADRO 1. Número de indivíduos de *Myzus persicae* em folha de couve. Departamento de Entomologia, ESALQ/USP, 1988.

Dia	Tempo (t_i)	Número de pulgões (y_i)
28/03	0	14
29/03	1	34
30/03	2	79
31/03	3	249
02/04	5	612
05/04	8	834

A equação da função logística obtida foi:

$$Y = 856{,}9140 \Big/ \left(1 + e^{(4{,}1703\ -\ 1{,}0264\ t_i)}\right),$$

(com dois ciclos de convergência e SQDesvios = 0.05132), cuja representação gráfica é apresentada na Figura 2.

O baixo valor encontrado para o SQDesvios, é um bom indicador de que os dados se ajustam ao modelo proposto, confirmando a hipótese de que o crescimento da população dessa espécie de pulgões possa ser estudada através de uma função logística (POOLE, 1974).

CONCLUSÃO

O pulgão *Myzus persicae* apresenta um crescimento populacional ajustado à função logística.

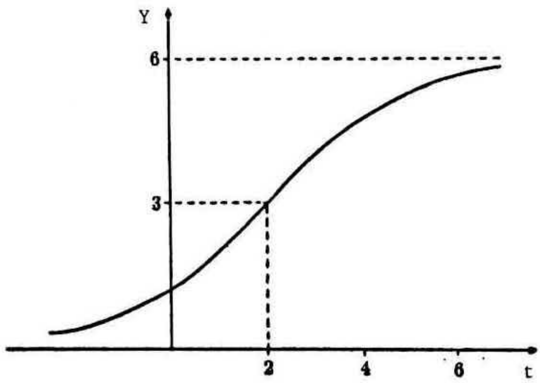

FIGURA 1.- A função $y = \frac{\alpha}{i + e^{-(\beta+\gamma t)}}$.

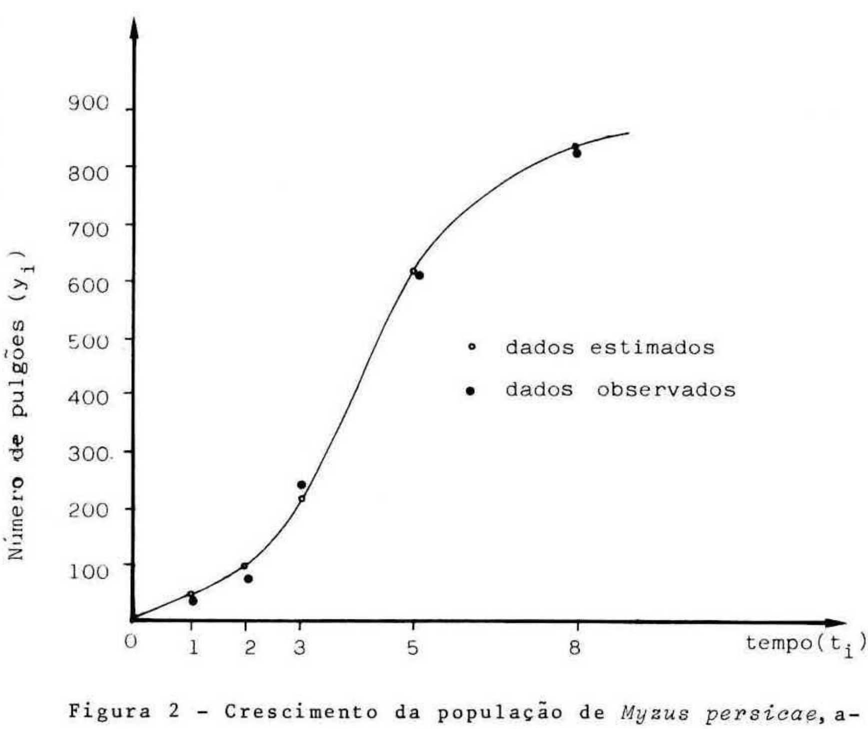

Figura 2 - Crescimento da população de *Myzus persicae*, ajustada à função logística
$$y = \frac{856,9140}{(1 + e^{(4,1703 - 1,0264\ t_i)}}$$

LITERATURA CITADA

ATKINSON, A.C. *Plots, Transformations, and Regression*. Oxford, Clarendon Press, 1985, 277p.

BATSCHELET, E. *Introdução à Matemática para Biocientistas*. Rio de Janeiro, Editora Interciência, 1978. 596p.

HOFFMANN, R. & VIEIRA, S. *Análise de Regressão: Uma Introdução à Econometria*, São Paulo, Editora Hucitec, 1983. 379p.

KREBS, C.J. *Ecology: The experimental analysis of distribution and abundance*. New York, Harpes & Row, Publishers, 1972. 694p.

MOSTELLER, F. & TUKEY, J.W. *Data Analysis and Regression*, Massachusetts, Addison - Wesley Publisihng Company, 1977. 585 p.

NELDER, J.A. The fitting of a generalization of the Logistic Curve. *Biometrics 17:*89-110, 1961.

POOLE, R.W. *An Introduction to Quantitative Ecology*. McGraw-Hill. Series in population biology, 1974. 532p.

SILVEIRA NETO, S.; NAKANO, O.; BARBIM, D.; VILLA NOVA, N.A. *Manual de Ecologia dos Insetos*, Editora Agronômica Ceres Ltda., 1976, 419p.

VERHULST, P.E. Recherches Mathématiques sur la Loi d'Accroissement de la Population. *Académie de Bruxelles. 18:* 1-38, 1845.